Tenzory a tenzorová pole

Tenzorový součin
Značení tenzorů
Operace na tenzorových prostorech
Souřadnice tenzorů
Tenzory - univerzální lineární zobrazení
Tenzorová pole
Tenzorové derivace

Tenzorový součin

Def: mějme vekt. pr. $V_1, \dots, V_k$ nad $\mathbb{K}$

tenzorový součin $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ je prostor lin. kombinací formálních součinů prvků z V_i s uvážením linearity v každém z arg. (distrib. a asoc. náს. skal.)

konkrétně

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k = \mathrm{Free}[V_1 \times \dots \times V_k] / U_0$$

$\mathrm{Free}[V_1 \times \dots \times V_k]$ volný vekt. pr. generovaný formálními lin. kombinacemi prvků z $V_1 \times \dots \times V_k$

U_0 vekt. pr. generovaný form. lin. kombinacemi prvků z $\mathrm{Free}[V_1 \times \dots \times V_k]$ typu

$$[a_1, \dots, \alpha a_j, \dots, a_k] - \alpha [a_1, \dots, a_j, \dots, a_k]$$
$$[a_1, \dots, u+v, \dots, a_k] - [a_1, \dots, u, \dots, a_k] + [a_1, \dots, v, \dots, a_k]$$

píšeme

$$a_1 \otimes \dots \otimes a_k = [a_1, \dots, a_k]_{U_0}$$

Pozn: stejné def. lze dát i pro součin R-modulů
píšeme $V_1 \otimes_R V_2 \otimes_R \dots$ pokud je potřeba zdůraznit R

Pozn: často budeme uvažovat vekt. pr. (modul) V a jeho duál V^*
vždy budeme předpokládat reflexivitu, tj. $V = V^{**}$
splněno pro kon. dim. vekt. pr. či lokálně kon. gener. moduly

existují přirozené isomorfismy typu

$(U \otimes V) \otimes W \Leftrightarrow U \otimes V \otimes W \qquad (u \otimes v) \otimes w \Leftrightarrow u \otimes v \otimes w$

$U \otimes V \Leftrightarrow V \otimes U \qquad u \otimes v \Leftrightarrow v \otimes u$

budeme nazývat stejného typu a ztotožňovat

pro U, V, W různé nemůže vést k nedorozumění a můžeme psát

$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes v \otimes w \qquad u \otimes v = v \otimes u$

pro $U = V$ může v $V \otimes V$ dojít k nedorozumění

$u \otimes v$ a $v \otimes u$ repres. dva různé tenzory

isomorf. $U \otimes V$ s $V \otimes U$ $\quad u \otimes v \Leftrightarrow v \otimes u$ pouze říká, že záměnou dostaneme isomorf. pr., ne že $u \otimes v = v \otimes u$

musíme umět rozlišit do kt. činitele součinu $V \otimes V$ patří obecné vektory v $u \otimes v$

Značení tenzorů

abstraktní značení

příslušnost vektorů v součinu do jedn. činitelů tenz. součinu určujeme důsledně pořadím

$$u\otimes v\otimes \phi \in \underset{\substack{\uparrow\\ u}}{V}\otimes \underset{\substack{\uparrow\\ v}}{V}\otimes \underset{\substack{\uparrow\\ \phi}}{U}$$

v tomto pojetí je násobení v $V\otimes V$ nekomutativní

$$u\otimes v \neq v\otimes u$$

značení pomocí abstraktních indexů

každý prostor v tenz. součinu pojmenujeme abstr. indexem

stejné prostory indexem stejného typu

$\underset{\underline{a}}{V}\otimes \underset{\underline{b}}{V}\otimes \underset{\underline{A}}{U}$ používáme podtržená písmena různých typů (font, abeceda, velikost)

vekt. z U, V mají 1 index, např. $u^{\underline{a}}$ $\phi^{\underline{A}}$

tenzory z tenz. souč. mají příslušný počet indexů

např. $T^{\underline{a}\underline{b}\underline{A}} \in V\otimes V\otimes U$

pro součinové tenz. defaultně rozumíme

$$(u\otimes v\otimes \phi)^{\underline{a}\underline{b}\underline{A}} = u^{\underline{a}}\otimes v^{\underline{b}}\otimes \phi^{\underline{A}}$$

duální prostory označujeme indexy stejného typu umístěné dole $\phi^{\underline{A}}\in U$ $\phi_{\underline{A}}\in U^*$

pojmenování činitelů umožňuje uvolnit pořadí v tenz. násobení – formální komutativita

$$u^{\underline{a}}\otimes v^{\underline{b}} = v^{\underline{b}}\otimes u^{\underline{a}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{obecně}}}{\neq} v^{\underline{a}}\otimes u^{\underline{b}} = u^{\underline{b}}\otimes v^{\underline{a}}$$

grafické značení

každý prostor v tenz. součinu má svou vlastní nožičku

stejné prostory mají stejné nožičky, duál orient. dolů

V vektory $\boxed{u}$, $\boxed{v}$ V^* 1-formy $\boxed{\alpha}$ $\boxed{\beta}$

U vektory $\boxed{\phi}$ $\boxed{\psi}$ U^* 1-formy $\boxed{\sigma}$ $\boxed{\omega}$

tenzory z tenz. součinů

$\boxed{T} \in V\otimes V\otimes U$

identifikace tenz. činitelů se dělá pořadím nožiček

$\boxed{T} = \boxed{u}\ \boxed{v}\ \boxed{\phi}$

lze měnit pořadí symbolů při zachování pořadí nožiček

$$\boxed{u}\ \boxed{v} = \boxed{v}\ \boxed{u} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{obecně}}}{\neq} \boxed{v}\ \boxed{u} = \boxed{u}\ \boxed{v}$$

porovnání značení

$u, v \in V \qquad \phi \in U \qquad X, Y \in V \otimes V \otimes U$

abstraktní znač.

$$X = u \otimes v \otimes \phi = \phi \otimes u \otimes v$$

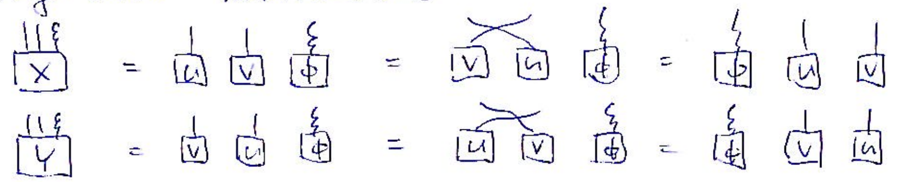
$$Y = v \otimes u \otimes \phi = \phi \otimes v \otimes u$$

značení pomocí abstr. indexů

$$X^{abA} = u^a v^b \phi^A = v^b u^a \phi^A = \phi^A u^a v^b$$

$$Y^{abA} = v^a u^b \phi^A = u^b v^a \phi^A = \phi^A v^a u^b$$

grafické značení



obvykle vynecháváme znaménko $\otimes$

$u \otimes v = uv \qquad u \otimes v \otimes \phi = uv\phi$

Def: tenzory nad V

$V^k_l = \underbrace{V \otimes \quad \otimes V}_{k} \otimes \underbrace{V^* \otimes \quad \otimes V^*}_{l}$ je tenz. mocnina V typu (k, l)

k-krát kontravariantní

l-krát kovariantní

$A \in V^k_l$ tenzor typu (k, l)

Operace na tenzorových prostorech

Lineární operace lze rozšířit z jejich znalosti na součinových tenzorech
⇑ obecný tenzor je lin. kombinace součinových tenz.

Zúžení, kontrakce

zúžení mezi V^* a V lze rozšířit na lib. tenz. součin obsahující $V^*\otimes V$

mějme V^k_l pro součinové tenz. def.

$$C^p_q : V^k_l \to V^{k-1}_{l-1}$$

$$u_1\otimes\dots\otimes u_k\otimes\alpha^1\otimes\dots\otimes\alpha^l \to$$
$$\to (\alpha^q\cdot u_p)\,\underbrace{u_1\otimes\dots\otimes u_k}_{\text{mimo } u_p}\otimes\underbrace{\alpha^1\otimes\dots\otimes\alpha^l}_{\text{mimo } \alpha^q}$$

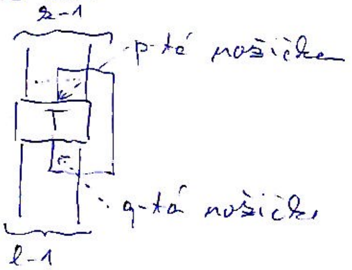
rozšíříme na celé V^k_l lineárně

značení

$C^p_q\, T$ $\qquad T^{a_1\dots m\dots a_k}_{b_1\dots m\dots b_l}$

p-tá pozice

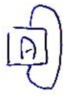
q-tá pozice



tj.

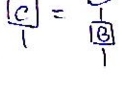
$\alpha\cdot a$ $\qquad \alpha_m a^m$

$C\,A = \operatorname{tr} A$ $\qquad A^m_m$



$A\cdot a$ $\qquad A^a_m a^m$

$A\cdot B = C$ $\qquad C^a_b = A^a_m B^m_b$

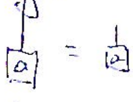


jednotkový tenzor

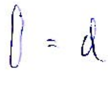
$\delta \in V^1_1$ $\qquad \delta^a_b$

reprezentuje identickou transf.

$\delta\cdot a = a$ $\qquad \delta^a_m a^m = a^a$



$C\,\delta = d$ $\qquad \delta^m_m = d$



permutace na V^k

σ permutace čísel $1\dots k$ $\bar\sigma$ inverzní perm.

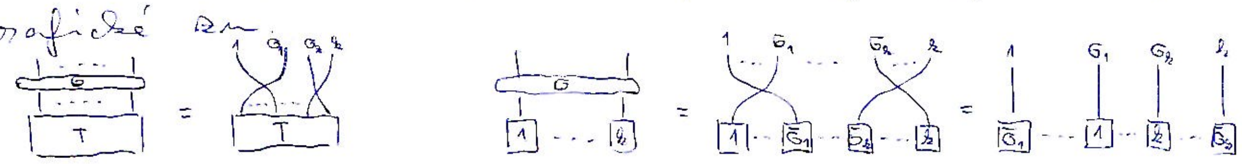
$$P_\sigma\, u_1\otimes\dots\otimes u_k = u_{\bar\sigma_1}\otimes\dots\otimes u_{\bar\sigma_k}$$

pomocí abstr. indexů

$$(P_\sigma T)^{a_1\dots a_k} = T^{a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_k}}$$

ukázka: $(P_\sigma\, u_1\otimes\dots\otimes u_k)^{a_1\dots a_k} = u_{\bar\sigma_1}^{a_1}\otimes\dots\otimes u_{\bar\sigma_k}^{a_k} = u_1^{a_{\sigma_1}}\otimes\dots\otimes u_k^{a_{\sigma_k}}$

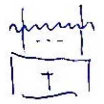
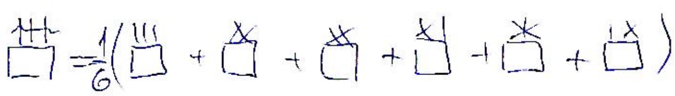
grafické zn.



symetrizace na V^k

$$\mathcal{S}T = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{\sigma \\ \text{perm. } 1\dots k}} P_\sigma T$$

$$(\mathcal{S}T)^{a_1\dots a_k} = T^{(a_1\dots a_k)} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} T^{a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_k}}$$

   např.   

antisymetrizace na V^k

$$\mathcal{A}T = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma\; P_\sigma T$$

$$(\mathcal{A}T)^{a_1\dots a_k} = T^{[a_1\dots a_k]} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma\; T^{a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_k}}$$

   např.   

Souřadnice tenzorů

volba báze

$V \quad e^{a}_{k}$

$V^* \quad e^{k}_{a}$

$e^{k}_{a}\, e^{a}_{l} = \delta^{k}_{l}$ duální báze

$V^{k}_{l} \quad e^{a_1}_{n_1} \otimes \dots \otimes e^{a_k}_{n_k} \otimes e^{n_1}_{b_1} \otimes \dots \otimes e^{n_l}_{b_l}$

souřadnice (komponenty)

$$T = T^{m_1 m_2 \dots}_{n_1 n_2 \dots}\, e_{m_1} \otimes e_{m_2} \otimes \dots \otimes e^{n_1} \otimes e^{n_2} \otimes \dots$$

abstr. indexy

$$T^{a_1 a_2 \dots}_{b_1 b_2 \dots} = T^{m_1 m_2 \dots}_{n_1 n_2 \dots}\, e^{a_1}_{m_1} \otimes e^{a_2}_{m_2} \otimes \dots \otimes e^{n_1}_{b_1} \otimes e^{n_2}_{b_2} \otimes \dots$$

$$T^{a_1 a_2 \dots}_{b_1 b_2 \dots} \xrightarrow{\text{báze}} T^{m_1 m_2}_{n_1 n_2}$$

objekt $\qquad$ komponenty

značení

$$\alpha \cdot a = \alpha_a a^a = \alpha_{n} a^{n} \quad \Leftarrow \quad e^{i}_{m}\, e^{m}_{j} = \delta^{i}_{j}$$

$$\mathcal{A} \longleftrightarrow A^{a \dots m \dots}_{b \dots m \dots} \longleftrightarrow A^{a \dots m \dots}_{b \dots m \dots}$$

transformace komponent

$e^{a}_{k} \to$ komponenty $A^{a \dots}_{b \dots}$

$e'^{a}_{k'} \to$ komponenty $A'^{a' \dots}_{b' \dots}$

$$e'^{a}_{k'} = M^{l}_{k'}\, e^{a}_{l} \qquad e^{a}_{k} = M^{-1\,l'}_{k}\, e'^{a}_{l'}$$

$$A'^{a' \dots}_{b' \dots} = M^{-1\,a'}_{m} \cdots M^{n}_{b'} \cdots A^{m \dots}_{n \dots}$$

souřadnicové báze

$$\frac{\partial}{\partial x'^{k'}} = \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^{k}} \qquad M^{l}_{k'} = \frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{k'}}$$

$$dx'^{k'} = \frac{\partial x'^{k'}}{\partial x^{l}}\, dx^{l} \qquad M^{-1\,k'}_{l} = \frac{\partial x'^{k'}}{\partial x^{l}}$$

Tenzory - univerzální lineární zobrazení

lineární operace mezi tenzory lze reprezentovat tenzorové

zobrazení $l : V^{k_1}_{l_1} \times V^{k_2}_{l_2} \times \dots \to V^k_l$

multilineární (lin v každém argumentu)

lze reprezentovat pomocí tenzoru

$$l^A(T_1, T_2, \dots) = L^A{}_{A_1 A_2 \dots} T_1^{A_1} T_2^{A_2} \dots$$

kde A, A_j jsou multiindexy prostorů V^k_l, $V^{k_j}_{l_j}$

Př: $l : V \times V^1_2 \to V^*$ tj. $V^1_0 \times V^1_2 \to V^0_1$

$$\sigma_a = l_a(u, A)$$

$$= L_{apq}{}^{mn} u^p A^q_{mn} \qquad L \in V^0_1 \otimes \underbrace{V^0_1 \otimes V^2_1}_{\text{vstupní argumenty}}$$

výsledek

L lze získat např. aplikací na bázi

$$L_{apq}{}^{mn} = e^c_a \, l_c(e_p, e_q \otimes e^m \otimes e^n)$$

zahrnuje totální reflexivitu

pro konečně dim. vekt. pr. platí

pro moduly dostatečné např. lok. konečně generovaný

Tenzorová pole

Def tenzorové pole typu (k,l)

řez tečného bundle $\mathbb{T}^k_l M$ tj.

$T: M \to \mathbb{T}^k_l M \quad x \to T(x) \in \mathbb{T}_x{}^k_l M$

hladké pokud komponenty v libovolné hladké bázi hladké

prostor tenz. polí na $U \subset M$ označíme $T^k_l M$

tenzorové pole definují svazek $T^k_l M$ tj.

$T^k_l U$ tenz. pole na U

$T^k_l M$ lze identifikovat s $\mathcal{F}M$-tenzorovým součinem

$\mathcal{F}M$-modulů TM a T^*M

$\mathcal{F}M$-moduly tenz. polí jsou totálně reflexivní

tenz. pole – univerzální $\mathcal{F}M$-lineární zobr. tj.

každé $\mathcal{F}M$-multilin. zobr. na tenz. polích do

tenz. polí lze repr. tenzorovým polem

$l: T^{k_1}_{l_1} M \times T^{k_2}_{l_2} M \times \ldots \to T^k_l M$

$\mathcal{F}M$-lineární v každém argumentu

$l(\ldots, fT, \ldots) = f\, l(\ldots, T, \ldots) \qquad f \in \mathcal{F}M$

lze reprezentovat tenz. polem

$l^A(T_1, T_2, \ldots) = L^A{}_{A_1 A_2 \ldots}\, T_1^{A_1} \cdot T_2^{A_2} \ldots$

A, A_i jsou multiindexy prostorů $T^k_l M$, $T^{k_1}_{l_1} M$

viz diskuze pro vekt. pr.

pro $\mathcal{F}M$-moduly netriviální $\Leftarrow$ lok. konečně generované

tzv. totální reflexivita

lokální struktura $\mathcal{F}M$-tenzorového součinu $T^k_l M$

při definici $T^k_l M$ jako $\mathcal{F}M$-tenz. součinu není jasná restrikce

lze lokalizovat do bodu a zpětně vybudovat $T^k_l U$

$l(A, B, \ldots)|_x$ závisí jen na $A|_x, B|_x, \ldots$

argument pomocí ořezové fce

umožňuje definovat $L|_x$ a poté $L|_U \to$ svazek $T^k_l M$

Tenzorové derivace

Def: tenzorové derivace D na tenz. alg.

D je tenz. derivace na alg. tenz. polí pokud

$D : T^k_l M \to T^k_l M \quad \forall k,l$ splňující:

$D(A+B) = DA + DB \qquad A,B \in T^k_l M$

$D(A \otimes B) = (DA) \otimes B + A \otimes (DB) \qquad A \in T^k_l M \quad B \in T^p_q M$

$D(C_1 A) = C_1 (DA) \qquad A \in T^k_l M$

lze zobecnit na derivace přidávající stupeň

$\mathcal{F}M$-lineárním způsobem

triviální převod na výše def. případ

$D_{\underline{A}}$ der. přidávající multiindex $\underline{A}$

$D_T = T^{\underline{A}} D_{\underline{A}}$ der. zavedená výše plně saturující $D_{\underline{A}}$ $(\forall T)$

Př: Lieova derivace $\mathcal{L}_a$

kov. der. ve směru vekt. pole ∇_a

[Fermi-Walkerova derivace

kov. diferenciál $\nabla_{\underline{m}}$

T: D tenz. derivace

restrikce D na $\mathcal{F}M = T^0_0 M$ je dáno vekt. polem

$Df = a \cdot df$

důkaz: tenz. der. zúžená na $\mathcal{F}M$ je derivace na $\mathcal{F}M$

T: D_1, D_2 tenz. derivace

D_1, D_2 shodné na $\mathcal{F}M$ a TM

$\Rightarrow D_1 = D_2$ na celé algebře

důkaz: viz věty níže

Def: pseudoderivace

$\mathbb{M}$ je pseudoderivace na alg. tenz. polí $\equiv$

$\mathbb{M}$ je tenz. der. anihilující fce z $\mathcal{F}M$, tj.

$$\mathbb{M} : T^k_l M \to T^k_l M \qquad \forall k,l \text{ splňující}$$

$$\mathbb{M}(A+B) = \mathbb{M}A + \mathbb{M}B$$
$$\mathbb{M}(A\otimes B) = (\mathbb{M}A)\otimes B + A\otimes \mathbb{M}B$$
$$\mathbb{M}(CA) = C\,\mathbb{M}A$$
$$\mathbb{M} f = 0 \qquad f\in \mathcal{F}M$$

T: $\mathbb{M}$ je pseudoderivace $\Rightarrow$

$\mathbb{M}$ je $\mathcal{F}M$-lineární operace $\quad \mathbb{M}(fA) = f(\mathbb{M}A)$

akce $\mathbb{M}$ je určena akcí na TM kde $\mathbb{M}$ působí

$$\mathbb{M}a^{a} = M^{a}{}_{n}\, a^{n} \qquad M\in T^1_1 M$$

akce $\mathbb{M}$ lze reprezentovat tenzorově

$$\mathbb{M}\, T^{a\dots}_{b\dots} = M^{a}{}_{n}\, T^{n\dots}_{b\dots} + \dots - M^{n}{}_{b}\, T^{a\dots}_{n\dots} - \dots$$

důkaz

$\mathcal{F}M$-linearita $\Rightarrow$ $\mathbb{M}a^{a} = M^{a}{}_{n}\, a^{n}$

$\mathbb{M}(\alpha_a a^a) = (\mathbb{M}\alpha_a)a^a + \alpha_a(\mathbb{M}a^a) = 0 \Rightarrow (\mathbb{M}\alpha_n)a^n = -\alpha_a M^a{}_n a^n$

$\Rightarrow \mathbb{M}\alpha_n = -M^a{}_n\alpha_a$

$\mathbb{M}(a^a\otimes\dots\otimes\alpha_b\otimes\dots) = (\mathbb{M}a^a)\otimes\dots\otimes\alpha_b\otimes\dots + \dots + a^a\otimes\dots\otimes M^n{}_b\alpha_n\otimes\dots + \dots$

$= M^a{}_n(a^n\otimes\dots\otimes\alpha_b\otimes\dots) + \dots - M^n{}_b(a^a\otimes\dots\otimes\alpha_n\otimes\dots) - \dots$

linearita $\Rightarrow$ obecné tenzory

T: D_1, D_2 tenz. der. shodné na $\mathcal{F}M$ $\Rightarrow$

$$D_2 = D_1 + \mathbb{M}$$

kde $\mathbb{M}$ je pseudoderivace daná akcí na vektorech

$$M^a{}_n a^n = D_2 a^a - D_1 a^a$$

implikuje též, že D je dáno akcí na $\mathcal{F}M$ a TM

grupa lin. transformací vekt polí a reprezentace na tenzorových polích

$\mathbb{G}$ $\mathcal{M}$-lineární nedegenerovaná transf. na TM

$\mathbb{G}$ lze repr. polem $G^{\underline{m}}_{\underline{n}}$ $\quad (\mathbb{G}a)^{\underline{m}} = G^{\underline{m}}_{\underline{n}} a^{\underline{n}}$

lze rozšířit na tenz. pole

$$(\mathbb{G}T)^{a\dots}_{b\dots} = G^{a}_{\underline{m}} \cdots G^{-1}{}^{\underline{n}}_{b} \cdots T^{\underline{m}\dots}_{\underline{n}\dots}$$

komutuje s kontrakcí a tenz. součinem, „lineární" triviálně na číslech

Lieova algebra grupy transf. =

= malé transformace $\mathbb{G}_\varepsilon$ $\quad \varepsilon \ll 1$

$$G_{\varepsilon}{}^{a}_{b} = \delta^a_b + \varepsilon M^a_b + O(\varepsilon^2)$$

akce na vekt. a tenz. pole = působení v řádu ε

T: akce Lieovy algebry grupy transf. je dána pseudoder.

důkaz

$$(\mathbb{G}_\varepsilon T)^{a\dots}_{b\dots} = (\delta^a_{\underline{m}} + \varepsilon M^a_{\underline{m}}) \cdots (\delta - \varepsilon M^{\underline{n}}_{b}) \cdots T^{\underline{m}\dots}_{\underline{n}\dots} + O(\varepsilon^2)$$

$$= T^{a\dots}_{b\dots} + \varepsilon \left(M^a_{\underline{m}} T^{\underline{m}\dots}_{b\dots} + \dots - M^{\underline{n}}_{b} T^{a\dots}_{\underline{n}\dots} - \dots \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Downarrow \quad = T^{a\dots}_{b\dots} + \varepsilon\, \mathbb{M}\, T^{a\dots}_{b\dots} + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathbb{G}_\varepsilon T \Big|_{\varepsilon=0} = \mathbb{M} T \qquad \text{kde} \quad \mathbb{M} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbb{G}_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0}$$